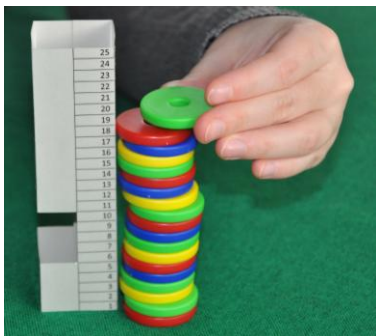


Co to jest niewiadoma?

Co to są liczby ujemne?

Można to łatwo wyjaśnić przy pomocy

Edukrążków!



Witold Sz wajkowski

Copyright: Edutronika Sp. z o.o.

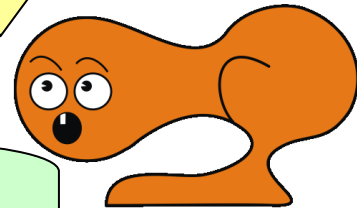
www.edutronika.pl

Jak wyjaśnić, co to jest niewiadoma?

Czy do liczby, której nie znamy, można dodać inną liczbę, którą znamy?



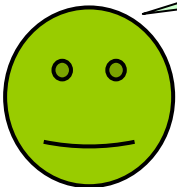
Cóż za bezsensowne pytanie! Oczywiście że nie! Dodać do siebie możemy tylko liczby, które znamy. Tylko wtedy będzie wiadomo jaki jest wynik dodawania.



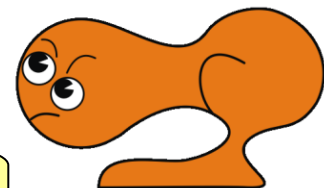
Chwileczkę! Ale czy słowo **dodać** zawsze musi oznaczać **wykonać obliczenie i podać wynik dodawania**? Weźmy na przykład **Edukrażki**. Trudno szybko policzyć ile kążków znajduje się w słupku, prawda?

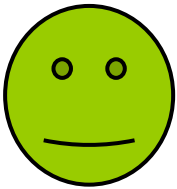


Czy możemy do słupka widocznego na rysunku dołożyć 3 kążki, które leżą obok?

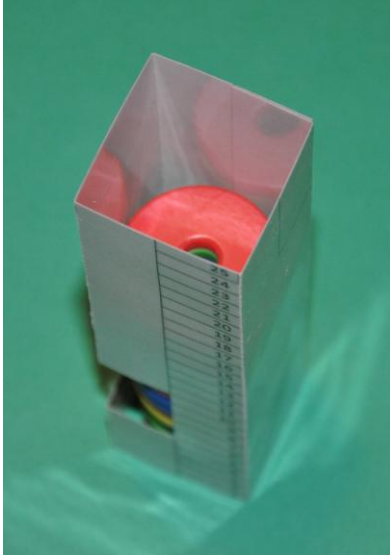


Oczywiście, że możemy, tylko po co? Nadal nie wiemy, ile kążków jest w nowym słupku. Wiemy tylko, że jest ich o 3 więcej niż było.

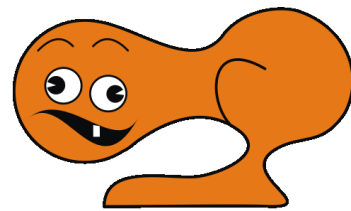




Zajrzyj do tej kwadratowej rurki. Czy potrafiłabyś powiedzieć ile jest w niej krążków, bez wyjmowania ich stamtąd?

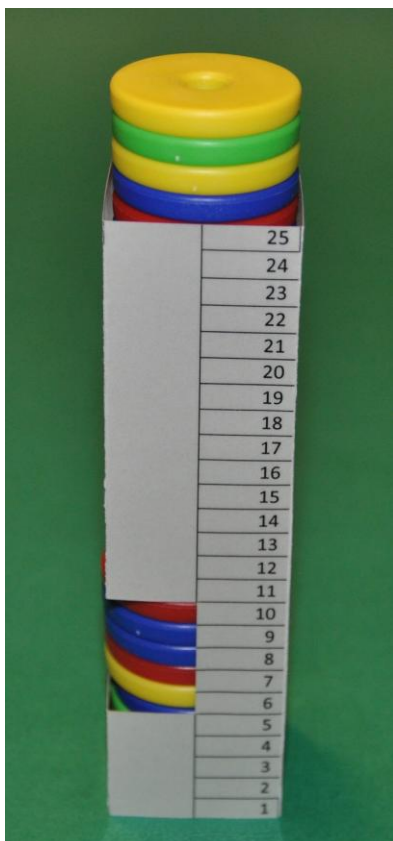


No nie... Trudno je tam policzyć.

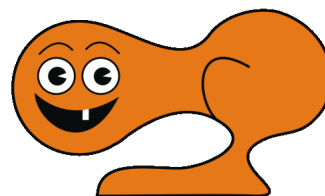


Ale widzisz, że na rurce są narysowane kreski w takich odległościach od siebie, jak grubość jednego krążka? W rurce zmieści się 25 krążków. Czy dzięki temu możemy dowiedzieć się ile krążków jest w rurce?





Chyba wiem! Do rurki można włożyć jeszcze inny słupek złożony ze znanej nam liczby krążków, ale taki, który będzie z niej wystawał.



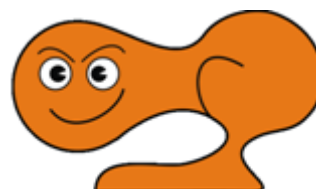
Oczywiście! Nieznaną liczbę krążków w rurce, czyli x , powiększyliśmy o liczbę krążków dodanych, czyli o 12. Wiemy, że razem jest ich 25 i jeszcze 4 wystające, czyli razem 29.

Teraz łatwo możemy obliczyć ile krążków było w rurce na początku:

$$x + 12 = 29 \quad \text{czyli} \quad 29 - 12 = 17$$

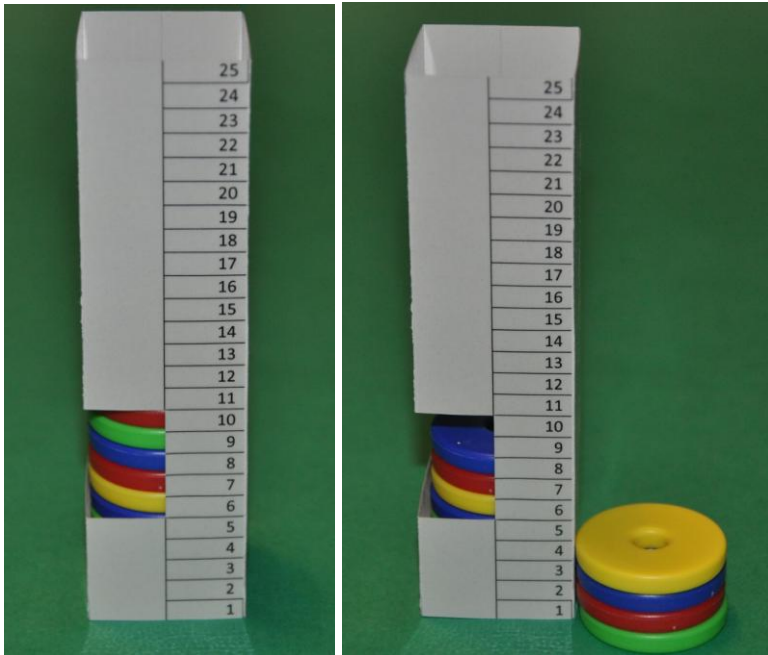
Jeśli okaże się, że włożony przez nas drugi słupek o znanej liczbie krążków nie wystaje z rurki, to musimy dołożyć do niego więcej krążków. Trzeba je jednak wcześniej policzyć, żeby wiedzieć ile w sumie krążków dołożyliśmy do pierwszego słupka.

Teraz już wiem, po co do nieznaney liczby dodawać znaną. A czy w znalezieniu nieznaney liczby może pomóc odejmowanie?

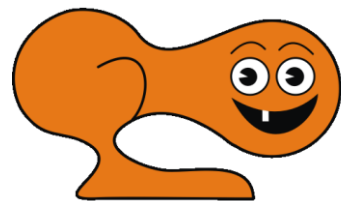




Tak. W tej rurce również znajduje się słupek krążków. Krążki widać, bo rurka ma wycięcie. W tej chwili nie wiemy ile krążków jest w słupku, ponieważ nie widzimy, do jakiej wysokości słupek sięga. Nie mamy więcej krążków, żeby włożyć z góry dodatkowy słupek, jak w poprzednim przykładzie.



Ale gdy wyjmemy ze słupka tyle krążków, żeby najwyżej leżący krążek słupka pojawił się w wycięciu rurki, to już łatwo odpowiemy, ile krążków było w słupku.

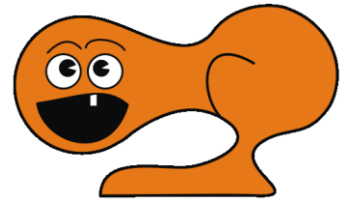
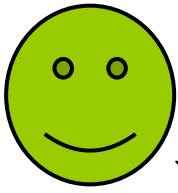


Oczywiście! **Nieznana liczba krążków, która była w słupku, czyli x , pomniejszona o liczbę krążków wyjętych, czyli 4, daje liczbę widoczną na miarce przy najwyższym krążku słupka, który został w rurce, czyli 8.**

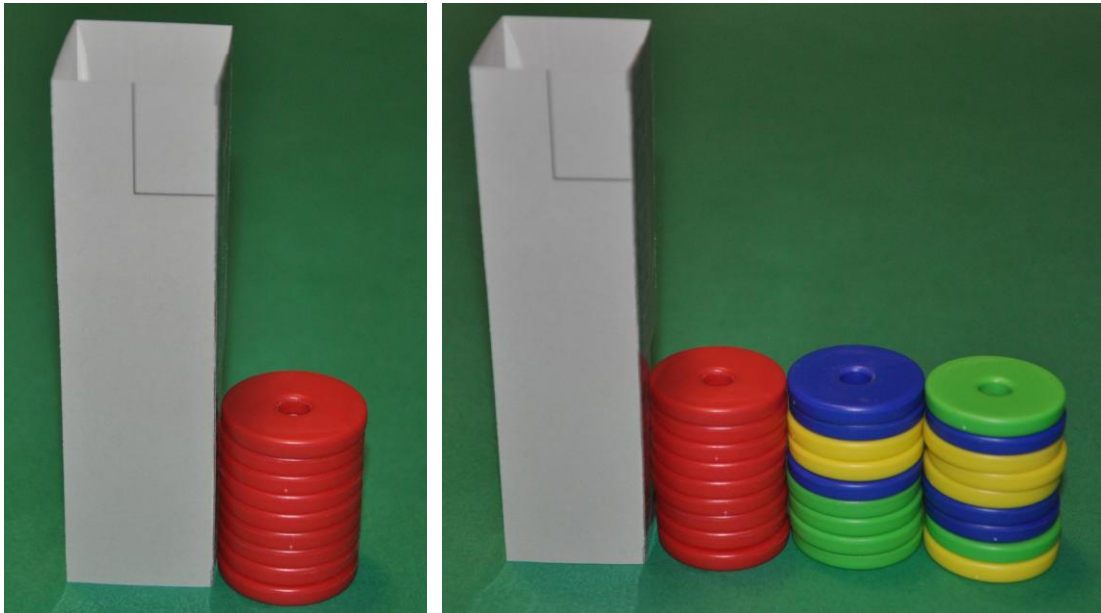
Teraz łatwo możemy obliczyć ile krążków było w rurce na początku:

$$x - 4 = 8 \quad \text{czyli} \quad 4 + 8 = 12$$

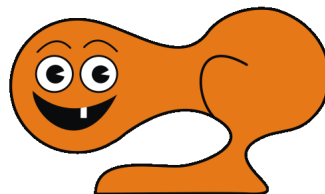
Czy w znalezieniu nieznannej liczby może pomóc mnożenie?

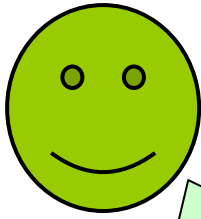


Tak. Na zdjęciu widać słupek, w którym nie chcemy liczyć krążków. Mamy naszą rurkę i wiemy już, że mieści się w niej 25 krążków, tylko że tym razem rurka nie ma miarki, żeby można było zmierzyć ten słupek. Mamy też sporo innych krążków. Jak szybko sprawdzić ile krążków jest w tym słupek, nie licząc ich?



Możemy łatwo zrobić słupki tej samej wysokości, co pierwszy słupek i po kolei wkładać je do rurki, licząc ile słupków weszło.

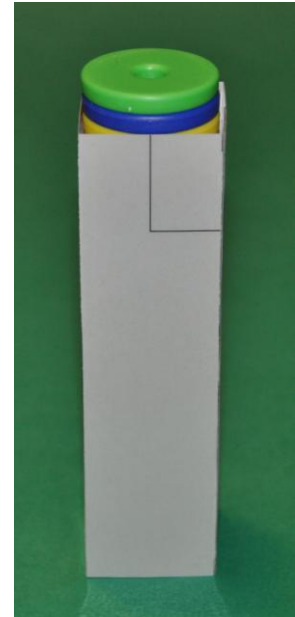




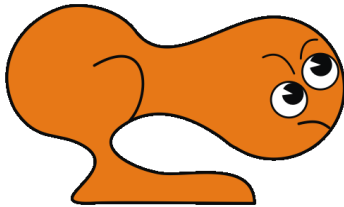
Jak widać zmieściły się jeszcze dwa takie słupki i kilka krążków wystaje. To, co zrobiliśmy można zapisać tak:

Nieznana liczba krążków w jednym słupku, czyli x powiększona trzykrotnie, to 25 i 2, które wystawały, czyli razem 27. Łatwo wywnioskować, że jeden słupek składał się z dziewięciu krążków, ponieważ włożyliśmy do rurki trzy takie same słupki.

$$3x = 27 \text{ czyli } 27 : 3 = 9.$$



Gdy chcę sprawdzić ile krążków jest w bardzo wysokim słupku, to czy muszę wszystkie liczyć po kolei?

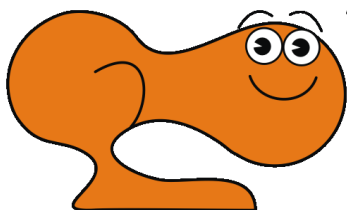


Oczywiście nie! Spróbujemy podzielić długi słupek na mniejsze, równe słupki, w których łatwiej będzie policzyć krążki. Gdy podzielimy go na słupki mające po 4 krążki, to otrzymamy równo 6 takich słupków. **Nieznana liczba krążków w długim słupku, czyli x , podzielona na liczbę małych słupków, czyli 6, daje 4, czyli liczbę krążków w jednym małym słupku.**

$$x : 6 = 4 \text{ czyli } 6 \times 4 = 24$$



Czy można najpierw zdecydować na ile słupków dzielimy duży słupek?



Tak. Jeżeli spróbujemy ten sam długi słupek podzielić na słupki, w których jest po 5 krążków, to otrzymamy 4 takie słupki i piąty słupek, w którym są 4 krążki. Czyli, gdybyśmy od długiego słupka najpierw odjęli te cztery krążki i następnie podzielili pozostałą część krążków na słupki złożone z pięciu krążków, to takie słupki będą 4.

Nieznana liczba krążków w długim słupku, czyli x , pomniejszona o 4 i podzielona przez liczbę krążków w jednym małym słupku, czyli 5, da w wyniku 4, czyli liczbę takich małych słupków.

Nieznana liczba krążków w długim słupku wynosiła więc:

$$(x - 4)/4 = 5 \quad \text{czyli} \quad 5 \times 4 + 4 = 24$$



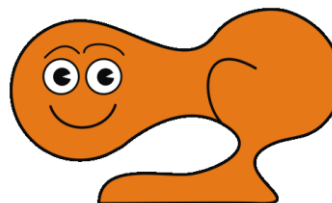
Według powyższych czterech schematów można przeprowadzić szereg ćwiczeń zmieniając wyjściową liczbę krążków, która jest niewiadomą **X**. Ćwiczenia takie pomagają w zrozumieniu istoty niewiadomej oraz rozwijają sprawność rachunkową. Nie bez znaczenia dla edukacji matematycznej jest też rozwijanie, przy okazji tych ćwiczeń, sprawności manualnej.

Jak wyjaśnić, co to są liczby ujemne?

Co to znaczy „minus dwa”?



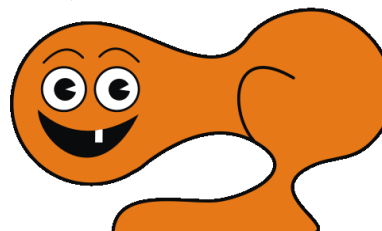
To znaczy „odjąć dwa” lub „minus dwa”, czyli liczbę ujemną.



A co to jest liczba ujemna.



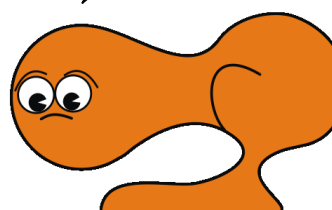
Ujemna może być np. temperatura.



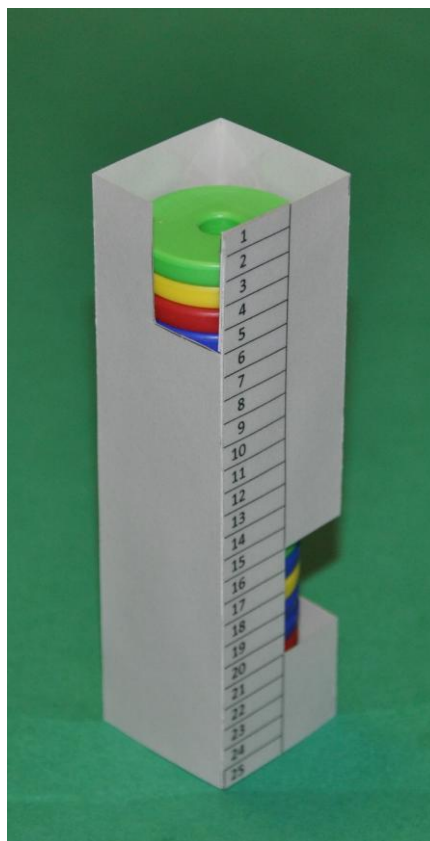
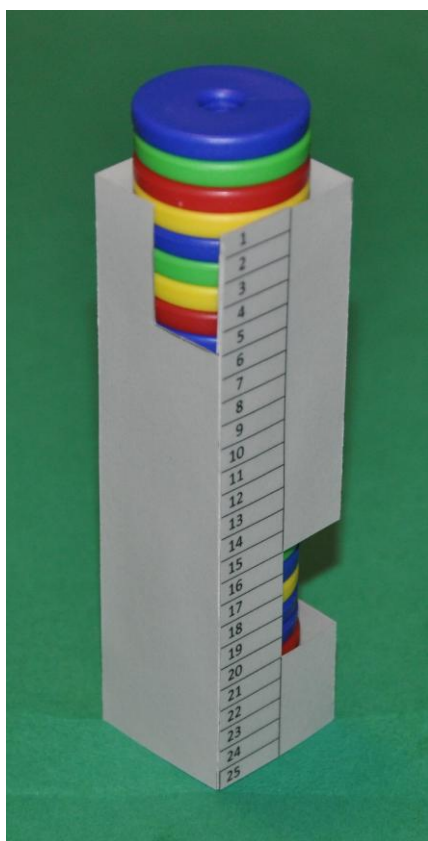
Temperatura to nie jest dobry przykład. W przypadku skali Celsjusza, jako zero przyjęto temperaturę zamarzania wody. Ale za zero równie dobrze można by przyjąć temperaturę zamarzania wody z solą i wtedy nowe zero byłoby o 5 stopni niżej. Obecne zero zamieniłoby się w 5 stopni powyżej zera.



To jak to wyjaśnić?



Bardziej zbliżone do istoty liczby ujemnej jest interpretowanie jej jako **braku** czegoś. Można się umówić, że zapis „-2” będzie też można odczytać nie tylko jako „odjąć dwa”, ale też „**brakuje dwóch**”, w zależności od sytuacji, w której został zastosowany. Weźmy słupek krążków włożony sklejonej z papieru rurki z widocznym wycięciem.



Gdy krążków jest za dużo, łatwo policzyć ile ich wystaje ponad rurkę. Jeżeli jest ich za mało – widać ilu brakuje dzięki wycięciu w rurce.



Przyjmijmy, że rurka symbolizuje pudełko, do którego maszyna pakuje krążki. Twoim zadaniem jest pilnowanie pracy maszyny. Ta maszyna czasami się myli i nie zawsze wrzuca tyle krążków, ile powinna. Musisz nacisnąć wtedy guzik i maszyna dorzuca trochę krążków, albo trochę wyjmuję, ale też nie zawsze tyle, ile trzeba. Takie źle zapakowane pudełko musisz odstawić na bok, ale musisz też zapisać, co zrobiła maszyna i jaki jest wynik. Wyobraźmy sobie następujące przypadki:

A. Załóżmy, że maszyna wrzuciła tyle krążków, że brakowało trzech, a potem dorzuciła pięć.

Zapišemy to tak:

Najpierw brakowało 3, potem dorzuciła 5, teraz jest o 2 za dużo.

B. Teraz maszyna wrzuciła o dwa krążki za dużo, a potem wyjęła trzy.

Najpierw było 2 za dużo, potem wyjęła 3, teraz brakuje 1.

C. Maszyna wrzuciła tyle krążków, że brakowało czterech, a potem dorzuciła dwa

Najpierw brakowało 4, potem dorzuciła 2, teraz brakuje 2.

D. Maszyna wrzuciła trzy krążki i wyjęła trzy krążki

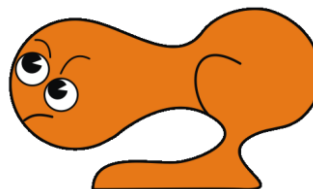
Najpierw, było 3 za dużo, potem wyjęła 3, teraz jest w sam raz.

Czy za każdym razem liczyłeś całkowitą liczbę krążków, którą wrzuciła maszyna?

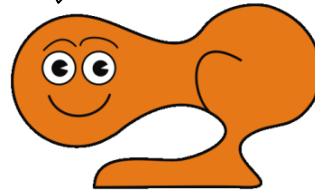


Oczywiście nie. Zwracałem tylko uwagę na to, ile brakuje lub o ile jest za dużo.

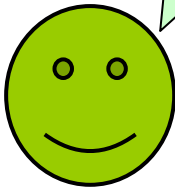
Czy nie można by ułatwić trochę pracy pakowaczowi, żeby nie musiał za każdym razem pisać takiego długiego zdania? Co to znaczy „minus dwa”?



Można, jeżeli umówimy się, że „brakuje” będziemy oznaczać znakiem „-”, „teraz jest” oznaczmy znakiem „=”, a „w sam raz” – cyfrą „0”.



Jak będą wyglądały twoje notatki w tych czterech opisanych przypadkach?

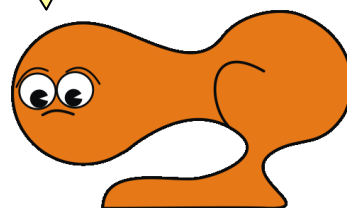


- A. Najpierw brakowało 3, potem dorzuciła 5, teraz jest o 2 za dużo.**
 $-3 + 5 = 2$
- B. Najpierw było 2 za dużo, potem wyjęła 3, teraz brakuje 1.**
 $2 - 3 = -1$
- C. Najpierw brakowało 4, potem dorzuciła 2, teraz brakuje 2.**
 $-4 + 2 = -2$
- D. Najpierw, było 3 za dużo, potem wyjęła 3, teraz jest w sam raz.**
 $3 - 3 = 0$

Przy pomocy maszyny do wrzucania krążków, można też wyjaśnić sens wykonywania działań na liczbach ujemnych: dodanie liczby ze znakiem minus, to „dodanie braku”. Jeżeli brakowało dwóch krążków i maszyna dodała jeszcze brak jednego krążka to teraz brakuje trzech krążków.



Jak można dodać brak jednego krążka?



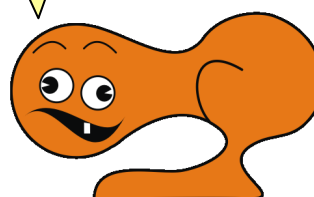
Oczywiście wyjmując jeden krążek. Zapišemy to tak:

$$-2 + (-1) = -2 - 1 = -3$$

Nieco trudniej wyjaśnić sens odejmowania liczby ujemnej, ale też można. Jeżeli brakowało trzech krążków i maszyna **odjęła brak** jednego krążka, czyli zmniejszyła brak o jeden krążek, to teraz brakuje tylko dwóch.



A jak można odjąć od braku brak?



Oczywiście dodając jeden krążek. Zapišemy to tak:

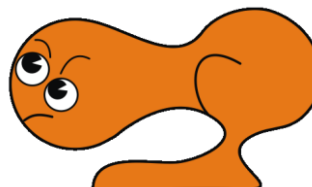
$$-2 - (-1) = -2 + 1 = -1$$

Odejmowanie liczby ujemnej można też wyjaśnić odwołując się do pojęcia długu. Dług, czyli zobowiązanie wobec kogoś, możemy interpretować jako liczbę ujemną. „- 2” oznacza, że jesteśmy winni komuś 2 złote. Jeżeli ten ktoś odejmie nam złotówkę długu, inaczej mówiąc anuluje złotówkę długu, to zostaje nam dług w wysokości 1 zł.



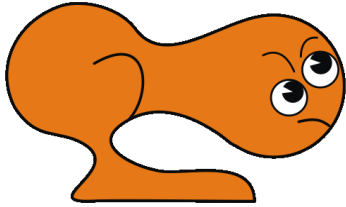
A jak rozumieć taki zapis?

$$-2 - (-3) = 1$$



Maszyna od braku dwóch krążków odjęła większy brak, bo brak trzech krążków. Czyli zlikwidowała cały początkowy brak i został jej jeszcze jeden krążek.

Nie rozumiem...



Odnosząc się do długu można to wyjaśnić tak. Mamy wobec banku dług w wysokości 2 złotych. Prezes banku nie pamiętał ile byliśmy winni bankowi i dał nam dokument, w którym stwierdził, że anuluje nam dług w wysokości 3 złotych. Mając taki dokument możemy pójść do kasy banku i pożyczyć jeszcze 1 zł. Następnie pokażemy dokument, że anulowano nam 3 zł długu, co oznacza, że nie mamy już wobec banku żadnych zobowiązań, ale została nam wzięta z kasy złotówka. Stąd wynik odejmowania: $-2 - (-3) = 1$!



Aaaaaaaaaa!!!!

